Memo

Werkgroep Kennis

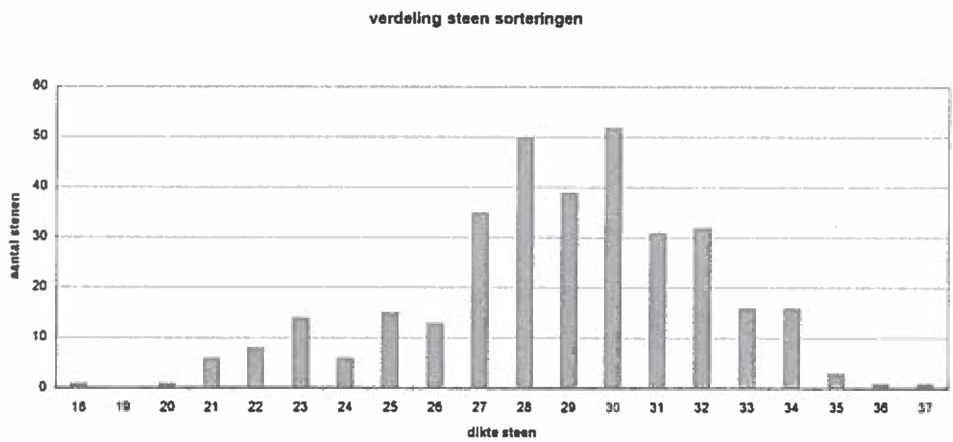
Ministerie van Verkeer en Waterstaat
Directoraat-Generaal Rijkswaterstaat
Projectbureau Zeeweringen

Betreft (actie en nr.)
1, statistisch verantwoord openbreken, definitief

Vraagsteller	Datum
-	-
Beantwoord door	Datum
[redacted]	13-07-99
Doorkiesnummer	Bijlage(n)
[redacted]	-
Status	Kenmerk
	K-99-06-43

1. Inleiding

Doel van deze actie is om op een statistische manier het gemiddelde te berekenen van de hoogte van basaltzuilen. Van de basalt werd aanvankelijk aangenomen dat de sortering bekend was: bijvoorbeeld een sortering 27-33 cm. De verdeling van die basalt zou dan uniform zijn. M.b.v. de case Nieuwe Neuzen is nu eerst gekeken of deze verdeling inderdaad uniform was. Uit figuur 1 is te zien dat de verdeling (van de hele dataset) niet uniform is, en ook niet normaal (eigenlijk is de verdeling asymmetrisch).



Figuur 1 Verdeling steensorteringen voor de hele dataset van Nieuwe Neuzen

Projectbureau Zeeweringen
Postadres p/a postbus 114, 4460 AC Goes
Bezoekadres p/a waterschap Zeeuwse Eilanden,
Piet-Heinstraat 77 Goes
Telefoon (0113) 24 13 70
Telefax (0113) 21 61 24

Maar het gaat niet om de verdeling zelf, maar om de verdeling van het gemiddelde. Er moet uit de steekproef een gemiddelde worden vastgesteld dat met 90% betrouwbaarheid ook het daadwerkelijke gemiddelde is. Als het aantal stenen dat getrokken is, groter is dan 3, is de verdeling van de gemiddelden te benaderen door de normale verdeling (dit heeft Marion van den Bol berekend).

Het probleem kan nu op de volgende manier worden aangepakt: Ervan uitgaande dat er genoeg proeven zijn, kan worden berekend wat de karakteristieke waarde is van het gemiddelde met bijvoorbeeld een 5%onderschrijdingskans.

In de volgende paragraaf wordt de methode eerst theoretisch uitgewerkt , ervan uitgaande dat de verdeling nog niet bekend is. In de derde paragraaf wordt een methode uitgelegd om vakgrenzen te onderscheiden en in de laatste paragraaf wordt een case van Nieuwe Neuzen nader uitgewerkt.

2. Theoretische uitwerking

De stochastische variabel x (gemiddelde zuildikte in dit geval) heeft een gemiddelde μ en een standaardafwijking σ.

Als de kansverdeling een normale verdeling is, wordt de karakteristieke lokale waarde met een over- resp. onderschrijdingskans van 5% gegeven door:

$x_k = \mu + 1{,}64\sigma$ respectievelijk $x_k = \mu - 1{,}64\sigma$

In het algemeen zijn μ en σ echter niet bekend. Wel kunnen ze worden geschat op basis van de proefresultaten. Voor n meetresultaten is een eerste schatting voor μ :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Een eerste schatting voor σ is:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Een eerste schatting voor x_k volgt dan uit:

$x_k = \bar{x} + 1{,}64s$ respectievelijk $x_k = \bar{x} - 1{,}64s$

Daar we geïnteresseerd zijn in de karakteristieke waarden van de verdeling van het gemiddelde moet de standaardafwijking s in deze formules worden vervangen door de standaardafwijking van het gemiddelde, nl. door $s\sqrt{\frac{1}{n}}$.

Rekening houdend met de onzekerheden door de beperkte omvang van de steekproef kan een schatting m van μ met een betrouwbaarheid van 90% verkregen worden uit (de onzekerheid wordt dan gerepresenteerd door de waarde van t):

$$m_{95} = \bar{x} + ts\sqrt{\frac{1}{n}} \qquad \text{respectievelijk} \qquad m_5 = \bar{x} - ts\sqrt{\frac{1}{n}}$$

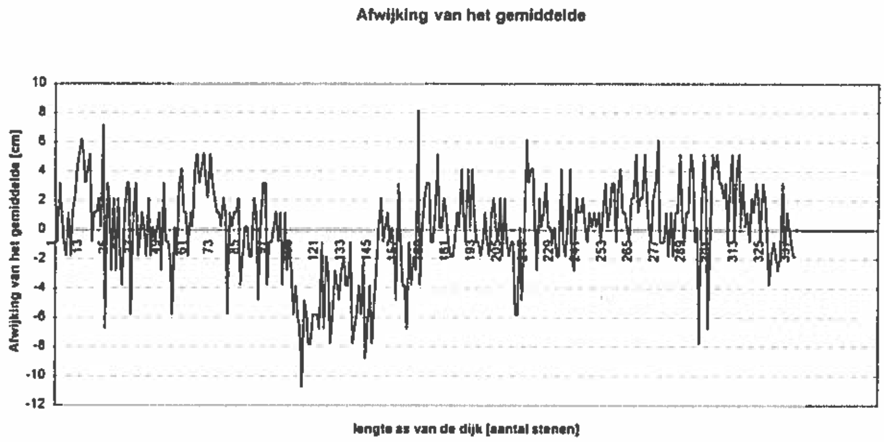
De waarde van t kan bij de gewenste overschrijdingskans en het aantal vrijheidsgraden (=steekproeven) worden berekend m.b.v. een statistisch programma. Als het aantal waarnemingen dicht bij 100 ligt, dan is t bij benadering gelijk aan 1,64 (de waarde die gebruikt wordt bij een normale verdeling).

Voorwaarde voor de bovenstaande beschouwingen is dat de proefresultaten verkregen zijn uit monsters afkomstig uit een statistisch homogene verzameling.

3. Cumulatieve somkaart

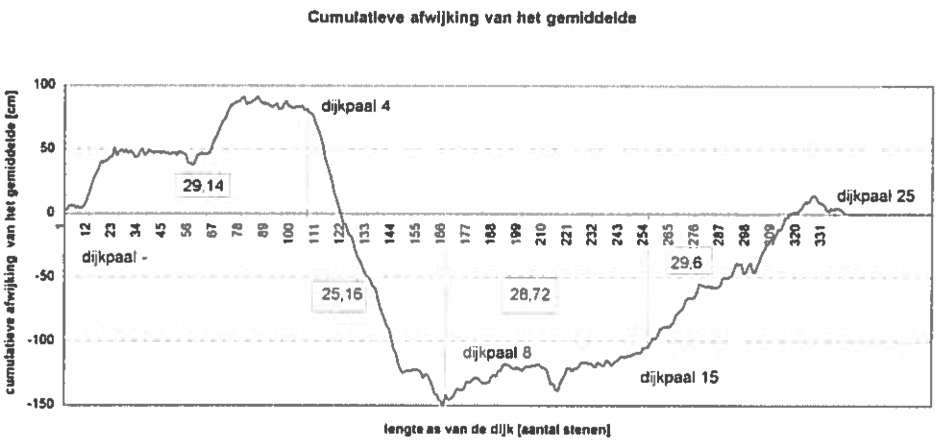
Een belangrijke vraag , voordat kan worden begonnen met de statistische analyse, is in wat voor stukken het vak moet worden opgedeeld. Het gaat hier namelijk om een vak van ongeveer 2,5 km, dat te groot is om als één vak te beschouwen. Op voorhand was al bedacht (zie memo WG Kennis 98.09.1) het vak als volgt op te delen n.a.v. gemeten diktes: dijkpaal -2 tot en met 3,5; dijkpaal 4 tot en met 6; dijkpaal 6 tot en met 17; dijkpaal 17 tot en met 25.
Er is een methode volgens welke deze vakgrenzen heel duidelijk kunnen worden bepaald: de cumulatieve somkaart.

Er is per gat een aantal stenen gemeten, deze metingen worden allemaal achter elkaar gezet. Deze metingen worden genummerd van 1 tot en met 334, wat betekent dat een meting van één gat bijvoorbeeld bestaat uit steen nummer 1 tot en met 10. Vervolgens wordt het steekproefgemiddelde berekend van de hele dataset (28,8 cm voor deze case). Dan wordt per gemeten steen het verschil berekend met het steekproefgemiddelde. Dit verschil is uitgezet in figuur 2. Hier is dus op de horizontale as het aantal gemeten stenen uitgezet (dit kan dus worden gezien als de lengte as van de dijk) tegen de afwijking van het gemiddelde. Hierin is al globaal te zien dat vanaf steen 110 tot en met 170 de gemeten waarde onder het gemiddelde ligt, terwijl dit voor de overige vakken erboven ligt.



Figuur 2 Afwijking van individuele stenen t.o.v. het gemiddelde

Er is echter een nog duidelijkere manier om dit tegen elkaar uit te zetten, en dat is door het cumulatief uit te zetten. Dit is te zien in figuur 3, hierbij is weer op de horizontale as het aantal gemeten stenen uitgezet tegen de cumulatieve afwijking van het gemiddelde.



Figuur 3 Cumulatieve afwijking t.o.v. het gemiddelde

In deze figuur moet niet gekeken worden naar de absolute waarden, maar naar de helling die de getekende lijn maakt. In het eerste stuk (tot en met dijkpaal 4) is de helling positief, wat betekent dat het gemiddelde van dit stuk structureel ligt boven het gemiddelde van de totale dataset. In het tweede stuk (dijkpaal 4 tot en met 7) is de helling negatief, wat betekent dat het gemiddelde hier lager ligt dan het gemiddelde van de totale dataset. In het derde stuk (dijkpaal 8 tot en met 15) is de helling ongeveer horizontaal, wat betekent dat het gemiddelde van dit stuk ongeveer gelijk is aan het gemiddelde van de totale dataset.. Deze gemiddeldes worden in de paragraaf 4 berekend aan de hand van een statistische analyse, dus niet op basis van deze grafiekjes (in figuur 3 zijn deze waardes al ingetekend). Dan kan ook worden geconcludeerd of de hier gehouden theorie ook daadwerkelijk klopt.

Overigens zou het eerste deel tot dijkpaal 4 ook kunnen worden opgedeeld in 4 aparte stukken. Uit praktische overwegingen is dat hier niet gedaan (de vakken worden dan te kort).

4. Case Nieuwe Neuzen

In deze paragraaf wordt allereerst het stuk tot dijkpaal 4 uitgewerkt. Het gemiddelde wordt berekend voor het betreffende stuk, dit is gelijk aan 29,6 cm. Vervolgens moet de schatting voor sigma worden berekend, die is gelijk aan 2,77 cm. Nu kan er een interval worden berekend waarbinnen het gemiddelde ligt, met een betrouwbaarheid van 90%:

$$(m_5, m_{95}) = \bar{x} \pm 1{,}64 s\sqrt{\frac{1}{n}}$$

De tweede term uit deze vergelijking is gelijk aan 0,45. Dit betekent dat het interval met een betrouwbaarheid van 90 % ligt tussen 29,6-0,45 en 29,6 +0,45 ofwel tussen 29,15 en 30,05. Dat betekent dat 29,15 cm het karakteristieke gemiddelde is met 5% onderschrijdingskans, en dat is ook de waarde die in het vervolg steeds zal worden berekend.

Hetzelfde kan worden gedaan voor de overige onderscheiden vakken (zie ook figuur 3), de resultaten hiervan zijn uitgezet in de volgende tabel:

dijkpaal	steekproef gemiddelde	standaard afwijking s	aantal metingen	m_5
-2 tot 4	29,6	2,8	103	29,2
4 tot en met 7	25,6	3,5	73	25,2
8 tot en met 15	29,1	2,2	78	28,7
16 tot en met 25	30	2,6	86	29,6

Een andere vraag die leeft, is de gevoeligheid van deze uitkomsten voor het aantal metingen. Dit is bekeken aan de hand van het dijkvak tot dijkpaal 4. Bij dit dijkvak was de schatting van de standaardafwijking 2,77 en het aantal metingen was ongeveer 100. De standaardafwijking is χ^2 verdeeld, en dan kan een interval bepaald worden waartussen de standaardafwijking met een betrouwbaarheid van 95% moet liggen:

$$0{,}861 \le \frac{s}{\sigma} \le 1{,}14$$

De standaardafwijking is dus maximaal 3,16 cm (met een betrouwbaarheid van 95%). In de volgende tabel is aangegeven wat het aantal metingen doet met het gemiddelde. Hierbij is uitgegaan van de volgende formule:

$$m_5 = \bar{x} - ts\sqrt{\frac{1}{n}}$$

aantal metingen	t	$t\sigma/\sqrt{n}$	m_5
30	1.697	0.858	28.7
50	1.676	0.657	28.9
70	1.667	0.552	29.05
90	1.662	0.485	29.12
100	1.660	0.46	29.14

Als er dus 70 metingen beschikbaar waren geweest voor dit vak, dan zou er nog kunnen worden gerekend met een gemiddelde van 29 cm, als het er minder worden niet meer.